Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

Задание 1 (14 баллов).

Через $\langle x\rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n+1/2\rangle=n$ при целом n). Положим $b_k=k+\langle\sqrt{k}\rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности: b1, b2, b3, … в порядке возрастания; получим последовательность a1, a2, a3, … Найдите явную формулу для числа a_n.

Задание 2 (17 баллов).

Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке [0,2] (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке [0,2] пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n, такая, что $x_{n+1} = 3|x_n - 1| - 1$, $n \geqslant 1$. Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0,2]$?

Задание 3 (28 баллов).

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) n=404?
б) n=406?

Задание 4 (23 балла).

Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω. Точки M, N лежат на сторонах AD, CD соответственно. Прямые, проходящие через M, N и параллельные соответственно AB, BC, пересекаются в точке P, лежащей внутри четырехугольника ABCD; а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q, лежащей на дуге CD, не содержащей точки B. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

Задание 5 (30 баллов).

Сережа задумал натуральное число n, не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1. Затем, на i-ом шаге (i = 2; 3; …) он делит число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ с остатком на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i.

Докажите, что $\overline{0,q_1q_2q_3\ldots} = \frac{n}{2019}$.

Задание 6 (32 балла).

В вершине A правильного треугольника ABC со стороной 3n метров (где n – натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Роботу можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника – робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

Задание 7 (38 баллов).

ABC – равносторонний треугольник на плоскости, а S – круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* – значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).
а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.
б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в первый раз в круг S после ровно 1000 операций. Найдите промежуток возможных значений d.